Эмилио Гальярдо

Университет г. Павии (Италия)

ВЫВЕДЕНИЕ МУЗЫКАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБОБЩЕНИЯ ПОНЯТИЯ ТОНАЛЬНОСТИ

Доклады Математического семинара Миланского университета
14 апреля 1986

РЕЗЮМЕ: Математический язык предложенный в этой статье основывается на некоторых фундаментальных понятиях теории гармонии которые можно было обнаружить еще в 1500 г. (до «хорошо темперированного» отождествления: *до*♯ тождественно *ре*♭, атональные интервалы отождествлены с тональными интервалами и т. д.) и которые в настоящее время, привлекая также “professional systems”, можно, как выясняется, заново понять и развить в приложении к новым музыкальным стилям, в которых новизна *атональных интервалов* вызывает необходимость обращения к математике в качестве проводника.

Рассмотрим конечное число тонов (в каждой «октаве»), например, следующие (упорядоченные по «квинтовым интервалам»), закодированные целыми числами:

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{cccccccccccc} ре\flat & ля\flat & ми\flat & си\flat & фа & до & соль & ре & ля & ми & си & фа\sharp \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right.$$

(тоны в разных «октавах», но с одинаковым именем, считаются одним и тем же тоном, и следовательно, исходя из этой кодировки, аккорды изучаются вместе со своими «обращениями»).

Такое упорядочение и такая кодировка позволяют определить *расстояние*, или *ширину интервала*, между двумя тонами как абсолютное значение их разности; например:

расстояние между *фа* и *си* есть $|5-11|=6$.

Классический лад есть максимальное подмножество (I), в котором каждая пара элементов N, M имеет расстояние $|N-M|\le 6$. Другими словами, классический лад есть подмножество (I) из 7 последовательных элементов; напр., { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* } (= «*до* мажор» = «натуральный *ля* минор»).

Два элемента (I) N, M могут принадлежать одному классическому ладу, если и только если:

$|N-M|\le 6$ — интервал (N, M) называется *тональным*, —

и не могут принадлежать одному классическому ладу если:

$|N-M|\ge 7$ — интервал (N, M) называется *атональным*.

Заметим, что это фундаментальное понятие оказалось утеряно из виду в «хорошо темперированной» системе, которая, делая упорядочение (I) *циклическим с периодом 12* (в частности, смешивая 13-й элемент, которым должен был бы стать *до*♯, с 1-м элементом *ре*♭), отождествляет с интервалами ширины ≤ 6 вообще *все* интервалы! Учет *атональных* интервалов (более значимых сегодня, чем в предшествующие столетия), а также использование *математической*, *не допускающей двусмысленностей* теории гармонии (которую можно запрограммировать на электронно-вычислительной машине), указывают, — уже на этапе теории композиции, — на наличие иных «темпераций», таких как «эннеадекафоническая темперация», обсуждавшаяся в [3] [4].

Понятие *классического лада* может быть основательно обобщено путем включения в *лад* ограниченного числа атональных интервалов определенных типов. Предложим следующее:

(II) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем ладом подмножество (I) S, которое:

(1) содержит не более *одной* пары N, M с $|N-M|\geq 8$;

(2) *не* содержит пар N, M с $|N-M|=7$;

(3) *не* содержит троек N, M, L с $|N-M|=|N-L|=5$, $M\neq L$.

Чтобы обосновать с точки зрения музыки ограничения на интервалы величины 7 и 5 (соответственно, «хроматические полутона» и «диатонические полутона»), заметим, что, особенно в первом из этих двух случаев, при *одновременном* звучании две такие ноты подчеркивают, из-за малой разности частот, явление «биений».

Из высших соображений, в случае «аккорда» (ноты которого, как правило, звучат одновременно) представляется оправданным еще более усилить условие (3):

(III) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем *аккордом* подмножество H из (I), удовлетворяющее (1) (2) и такое, что оно

(4) *не* содержит пар N, M с $|N-M|=5$.

Очевидно, *аккорд* есть частный случай *лада*: лады могут быть более богаты элементами. Оператор, который обогащает некоторое подмножество (I) элементами из его «музыкального окружения», задает следующее:

(IV) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем *пополнением* подмножества Z из (I) множество, которое мы обозначим через $\bar{Z}$, полученное из Z включением также всех элементов X из (I), для которых:

(5) $(\min Z)-1\leq X\leq(\max Z)+1$;

(6) $|X-N|\leq 6$ для каждого элемента N из Z;

(7) $|X-N|=5$ для *не более чем одного* элемента N из Z.

(V) ТЕОРЕМА: *Пополнение* всякого *аккорда* есть *лад*.

Доказательство: Пусть Z — *аккорд*. Заметим прежде всего, что пополнению $\bar{Z}$ *не* могут принадлежать три элемента вида $X-5$, X, $X+5$; действительно, в предположении от противного, что они ему принадлежат, из (5) следует: $\min Z\leq X+4$, $X+4\leq\max Z$, — и, применяя (6) с $N=\max Z$, а затем с $N=\min Z$, мы видим, что $X-5$ и $X+5$ не могут быть присоединены оператором пополнения, и следовательно, $X-5\in Z$ и $X+5\in Z$, и тогда, из (4), $X\notin Z$; но, в силу (7), такой элемент тем более не мог быть присоединен оператором пополнения, вопреки предположению $X\in\bar{Z}$ — а значит, $\bar{Z}$ удовлетворяет (3). Продолжая доказательство, рассмотрим некоторую пару N_1, N_2 из $\bar{Z}$. Множество пар с $N_1\in Z$, $N_2\in Z$ по определению аккорда удовлетворяет (1) (2). Пары с $N_1\notin Z$, $N_2\in Z$, в силу (6), удовлетворяют условию $|N_1-N_2|\leq 6$ и не нарушают свойств (1) (2). Остается только рассмотреть пары с $N_1\notin Z$, $N_2\notin Z$ и показать, что $|N_1-N_2|\leq 6$. В предположении, для определенности, что $N_1<N_2$, из (5) (6) следует

$$(\min Z)-1\leq N_1<N_2\leq(\min Z)+6,$$
$$(\max Z)-6\leq N_1<N_2\leq(\max Z)+1,$$

то есть N_1, N_2 оба содержатся в *двух* интервалах ширины 7, откуда $|N_1-N_2|\leq 7$; однако при дальнейшем уточнении случай $N_2-N_1=7$ может быть исключен, потому что в таком случае *два* рассматриваемых интервала ширины 7 должны были бы совпадать, и тогда, приравнивая левые части, мы получили бы $(\max Z)-(\min Z)=5$, вопреки предположению (4).

Теорема (V) тем самым доказана.

(VI) ЗАМЕЧАНИЯ: Можно усмотреть в определении (II), что в *ладе* только пара крайних элементов может иметь расстояние > 6. Видно также, что в определении пополнения (IV) условие (5) зависит только от *краев* Z, а (6), будучи эквивалентно

$$|X-\min Z|\leq 6\,,\quad |X-\max Z|\leq 6\,,$$

с учетом условия (7), в отношении двух множеств $W\subset V$, с $Z=W$ является *менее жестким*, чем с $Z=V$. Заметим, наконец, что, если V есть *лад*, — или, в особенности, *аккорд*, — определив W как пару элементов

$$W=\{\,\min V, \max V\,\}\,,$$

получим

$$\overline{W}=\overline{V}\ (\text{если } V \text{ есть } \textit{лад}).$$

Только это последнее замечание требует доказательства.

Рассмотрим элемент $X\in\overline{V}$ и покажем, что $X\in\overline{W}$, различая следующие два варианта:

В случае $X\in\overline{V}\setminus V$, то есть, если X присоединен к V оператором пополнения, из очевидных предыдущих замечаний следует, что X присоединяется оператором пополнения также и к W.

В случае $X\in V$, опуская тривиальные случаи $X=\min V$, $X=\max V$ (в которых $X\in W\subset\overline{W}$), мы можем положить

$$\min W=\min V<X<\max W=\max V$$

и показать, что оператор пополнения, действуя на $Z=W$, присоединяет X. Действительно, X удовлетворяет условию (5) с $Z=W$ (поскольку уже наложенное ограничение еще сильнее); с другой стороны, X удовлетворяет (6) с $Z=W$, потому что (при $X\in V$, $N\in W\subset V$) в *ладе* V единственная пара с расстоянием > 6 (как выше замечено) должна была бы быть парой краев V, исключенной по предположению $\min V\neq X\neq\max V$, и, наконец, для $X(\in V)$ выполнено (7) с $Z=W(\subset V)$, поскольку в ладе, согласно (3), нет троек $X-5$, X, $X+5$.

Обратно, рассмотрим элемент $X\in\overline{W}$ и покажем, что $X\in\overline{V}$, в двух возможных случаях:

В случае $X\in\overline{W}\setminus W$, то есть если X подключен оператором пополнения при его действии только на края лада V, покажем что $X\in\overline{V}\setminus V$, то есть что X присоединяется оператором пополнения при его действии на V. Действительно, условия (5) с $Z=W$ и с $Z=V$ будут эквивалентны, если только (как указано) остаются эквивалентными условия (6); а условие (7) могло бы стать более сильным с $Z=V$, то есть когда $X-5$ и $X+5$ принадлежат V; но в *ладе* V эта пара с расстоянием 10 > 6 могла бы появиться (как замечалось) только если $X-5$ и $X+5$ были бы краями V, то есть были бы элементами W, и тогда X, учитывая (7) с $Z=W$, не мог бы принадлежать $\overline{W}\setminus W$, вопреки принятому предположению.

В случае $X\in W$, то есть если X — один из краев V, утверждение $X\in\overline{V}$ тривиально.

(VII) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем *полным* подмножество (I), которое совпадает со своим пополнением.

Пусть S — *полный лад*, то есть такой лад, для которого $S=\overline{S}$. Учитывая, что, согласно последнему из замечаний (VI), $\overline{S}$ совпадает, в свою очередь, с пополнением множества, состоящего из двух краев лада S, легко видеть, что *полные лады* могут быть 5 трансляционных типов: их характеристические функции, с точностью до трансляций внутри множества (I), суть:

(8) 1 1 1 1 1 1 1
(9) 1 0 1 1 1 1 1 0 1
(10) 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1
(11) 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1
(12) 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1

Тип (8) выделяет 7 *последовательных в упорядочении* (I) элементов и таким образом позволяет найти, посредством трансляций, *классические лады*.

Можно заметить, что два крайних элемента полного лада полностью его определяют и, для типов (9) … (12), составляют единственную *атональную* пару (с интервалом > 6), присутствующую в соответствующем ладе.

(VIII) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем *порядком разрешения аккорда* H в *аккорд* H^* число

$$\max_K \| K \setminus H^* \| \text{ с } H^* \subset \text{аккорду } K \subset H \cup H^* ,$$

где через $\|J\|$ обозначено число элементов J. В частности, H имеет *разрешение порядка* 0 в H^*, если в множестве $H \cup H^*$ аккорд H^* является максимальным, то есть:

$$H^* \subset \text{аккорду } K \subset H \cup H^* \;\Rightarrow\; K = H^* .$$

Будем говорить, что два аккорда H, H^* являются *смежными*, если каждый из них имеет разрешение порядка 0 в другой.

Например, при кодировке (I), аккорды

$$H = \{ \textit{ми}\flat, \textit{соль}, \textit{си} \} = \{ 3, 7, 11 \}$$
$$H^* = \{ \textit{ре}\flat, \textit{соль}, \textit{си} \} = \{ 1, 7, 11 \}$$

являются смежными, потому что ни один из них не может быть обогащен элементами другого, так как

$$\{ \textit{ре}\flat, \textit{ми}\flat, \textit{соль}, \textit{си} \} = \{ 1, 3, 7, 11 \},$$

имея *две* пары с интервалом ≥ 8, *не* является аккордом.

(IX) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть H — *аккорд*, содержащийся в *полном ладе* S. Будем называть H *центральным* в S, если $\bar{H} = S$. Будем называть H *побочным* в S, если H не является центральным, но является смежным некоторому аккорду H^*, центральному в S.

(X) ТЕОРЕМА: Всякий *аккорд* H, содержащийся в *полном ладе* S, есть *подмножество* некоторого аккорда K, *центрального* или *побочного* в S.

Доказательство использует следующие две леммы:

(XI) ЛЕММА: Пусть *аккорд* $H \subset$ *полному ладу* S. *Достаточным* условием, чтобы H был *центральным* в S является требование, чтобы H содержал *края* S.

Действительно, с учетом последнего из замечаний (VI), справедливого для лада и тем самым также для аккорда, видно, что, если лад S и аккорд H имеют общие края, то они имеют также общее пополнение: $\bar{H} = \bar{S} = S$ в силу полноты; то есть H централен в S.

Можно видеть, что это условие *не* является необходимым. Например, { *до*, *соль*, *ми* } = { 6, 7, 8 } имеет пополнением полный лад { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* } = { 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 }, хотя и не содержит его краев.

(XII) ЛЕММА: Пусть *аккорд* $H \subset$ *полному ладу* S, а X, X^* — два элемента S, находящиеся на расстоянии $|X - X^*| = 5$, с $X \in H$ (и, следовательно $X^* \notin H$, поскольку H — аккорд). Тогда множество $H^* = (H \setminus X) \cup X^*$ есть аккорд, *смежный* H.

Доказательство: Из предположения $X^* \in S$ вытекает, что построение H^* не выводит из лада S, и потому для доказательства того, что H^* также является аккордом, остается проверить выполнение последнего условия (4); оно удовлетворяется, потому что, согласно (3), *единственным* элементом лада S на расстоянии 5 от X^* будет X, и потому пары с расстоянием 5 не добавляются пополнением. Наконец, для доказательства *смежности* H и H^*, учтем, что *единственные различия* между H и H^* суть:

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} X \in H \\ X^* \notin H \end{cases} \qquad \begin{cases} X \notin H^* \\ X^* \in H^* \end{cases} \qquad \text{с } |X - X^*| = 5 ,$$

и достаточно заметить, что $H \cup X^*$, $H^* \cup X$ *не* являются аккордами, так как содержат пару X, X^*.

(XIII) ЛЕММА: Необходимым и достаточным условием для того, чтобы два аккорда H, H^*, содержащиеся *в одном и том же* полном ладе S, были *смежны*, является их *различие как в* (13) в паре точек X, X^* с интервалом 5.

Условие достаточно: Учитывая, что в ладе S пары элементов S с расстоянием 5 *изолированы*, конструкция, указанная в (XII) может быть осуществлена одновременно в таких парах.

Условие также необходимо: Пусть X — точка, где H, H^* различаются. Положим, для определенности, $X \in H$, $X \notin H^*$. Поскольку предполагается, что H, H^* смежны, имеет место:

(14) $H^* \cup X$ *не* должно быть аккордом.

С другой стороны, поскольку $H^* \subset S$, $\mathrm{X} \in H \subset \mathrm{S}$, имеет место:

(15) $H^* \cup X \subset$ *ладу* S

С учетом определений лада (II) и аккорда (III), из (14) (15) следует, что $H^* \cup X$ должно содержать элемент X^* (единственный в S) с расстоянием $|X - X^*| = 5$. А значит, можно уточнить: $X^* \in H^*$ и $X^* \notin H$ (так как $X \in H$, а H — аккорд). Для завершения надо еще лишь учесть, что в ладе пары элементов с расстоянием 5 изолированы.

(XIV) КОРОЛЛАРИЙ: В пределах *фиксированного* полного лада S *отношение смежности транзитивно*.

(XV) ЗАМЕЧАНИЕ: Утверждения в (XIII) (XIV) *не* выполняются для аккордов, *не* содержащихся в одном и том же ладе.

Например, $\{$ *ми*♭, *фа*, *си* $\} = \{3,\ 5,\ 11\}$ смежен $\{$ *ре*♭, *фа*, *си* $\} = \{1,\ 5,\ 11\}$, но эти аккорды различаются в паре точек с расстоянием $|$ *ми*♭–*ре*♭ $| = |3 - 1| = 2$, а не 5. С другой стороны, *ре*♭ = 1 смежен *до* = 6, который смежен $\{$ *ре*♭, *си* $\} = \{1, 11\}$; но первый и третий аккорды *не* являются смежными.

Доказательство теоремы (X):

Обозначим для краткости:

$$X^* = \min \mathrm{S}\,,\ X = (\min S) + 5\,,\ Y = (\max S) - 5\,,\ Y^* = \max S\,.$$

Построим аккорды $K \supset H$ и K^*, смежный K, в следующих различных случаях:

Если $X \notin H, Y \notin H$, положим $K = H \cup X^* \cup Y^*$, $K^* = K$

Если $X \in H, Y \notin H, X^* \notin H$, положим $K = H \cup Y^*$, $K^* = (K \setminus X) \cup X^*$

Если $X \notin H, Y \in H, Y^* \notin H$, положим $K = H \cup X^*$, $K^* = (K \setminus Y) \cup Y^*$

Если $X \in H, Y \in H, X^* \notin H, Y^* \notin H$, положим $K = H$, $K^* = (((K \setminus X) \cup X^*) \setminus Y) \cup Y^*$

В каждом случае *из предшествующих лемм* следует:

$$K \supset H\,,\ K^* \text{ смежен } K \text{ и содержит края S, } \overline{K^*} = S$$

Теорема (X) таким образом доказана.

(XVI) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем *тональностью* пару (H, S) с *аккордом* $H \subset$ *ладу* S, подразумевая при этом, что пары (H, S) (H^*, S) эквивалентны, если H, H^* *смежны*.

Примеры тональностей с ладом типа (8):

({ *до*, *соль*, *ми* }, { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* })

традиционная нотация: «*до* мажор»; «тонический» аккорд оказывается *центральным* в этом ладе S то есть, порождает его как свое пополнение.

({ *до*, *ля*, *ми* }, { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* })

традиционная нотация: «натуральный *ля* минор»; и здесь аккорд *централен* в том же ладе S, однако *тональность* уже другая, поскольку эти два аккорда *не* являются *смежными* (в силу того, что их объединение не есть аккорд).

({ *фа*, *соль*, *си* }, { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* })

«доминантсептаккорд с пропущенной квинтой», *центральный* в S, но *смежный* { *до*, *соль*, *ми* }, а следовательно, *тональность* эта *эквивалентна* «*до* мажору».

({ *фа*, *ре*, *ля* }, { *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *ми*, *си* }) *тональность* «дорического ре» из «грегорианских кантов»; аккорд *не* будет ни центральным, но побочным в S, — но это *подмножество* аккорда { *фа*, *ре*, *ля*, *си* }, центрального в S.

Другие примеры тональности с ладами типов (9) … (12):

({ *ля*♭, *ре*, *си* }, { *ля*♭, *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *си* })

этот «уменьшенный» аккорд является *центральным* в ладе; объединение этого лада с аккордом { *ми*♭, *до*, *соль* }, *смежным* { *ля*♭, *ре*, *си* }, традиционно называется «ладом гармонического минора», но на самом деле *не* является ладом, согласно определению (II), из-за наличия *двух* атональных интервалов *ми*♭ — *си*, *ля*♭ — *си*.

({ *ре*♭, *фа*, *си* }, { *ре*♭, *фа*, *соль*, *си* })

«французская секста» из [2], стр. 275; *центральный* аккорд.

({ *ми*♭, *фа*, *си* }, { *ми*♭, *фа*, *до*, *соль*, *ре*, *ля*, *си* })

с аккордом, *смежным* предыдущему; этот случай слабо изучен в литературе (*си* здесь не то же самое, что *до*♭); лад «мелодического минора»; аккорд *централен*.

(XVII) ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Назовем порядком модуляции из тональности (H_1, S_1) в тональность (H_2, S_2) число

$$\| S_2 \setminus \overline{S_1} \|$$

где через $\|J\|$ обозначено число элементов J.

Пример 1, приведенный на рисунке, был сочинен на основе представленной теории. Имеется последовательность 9 *ладов* $\{S_i\}$, где *каждый* лад есть объединение последовательности *аккордов* $\{H_{ij}\}$ из трех нот (рассматривая аккорды, которые оставляют на месте две ноты, как промежуточные фазы):

$$S_i = \bigcup\nolimits_{j=1\ldots n_i} H_{ij}\ ,\ \ i = 1\ \ldots\ 9\ ,\ \ \|H_{ij}\| = 3\ .$$

В каждом ладе S_i имеет место $\|H_{ij} \cap H_{i,j+1}\| = 2$. *Пополнения* $\{\overline{S_i}\}$ являются *полными ладами* типов (8) (11) (8) (10) (8) (8) (8) (8) (9) соответственно. Только мелодический голос может вызвать *модуляции* $S_i \to S_{i+1}$; в каждой из них *порядок разрешения* = 0, а *порядок модуляции* = 1.

Исполнение примера 1 в «хорошо темперированной» системе, в рамках которой остается и додекафоническая музыка, выглядит весьма альтерированным, особенно в последних двух тактах.

ABSTRACT: This article is a study of the problem posed by the use of a theory of harmony by Composers. Such a doctrine has the chance to become a mathematical theory in most temperaments discovered in the history of music except the traditional. Basic non ambiguous concepts give rise to an algorithmic language which contains classic notions of harmony as well as rules for a new kind of “atonal intervals”. Resulting new styles of music can be performed with standard instruments not because of the traditional dodecaphonic temperament but in spite of it.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] *The New Grove’s Dictionary of Music and Musicians* (London Macmillan). Cnf. item *Temperament*.

[2] H. TISCHLER: *Practical Harmony*. Allyn and Bacon (Boston 1964)

[3] E. GAGLIARDO: *Enneadecaphonic music. A new system of harmonic tones*. Atti Accademia Ligure, **37** (1980)

[4] E. GAGLIARDO and M. GHISLANDI: *Did Beethoven use the enneadecaphonic theory?* Interface: Journal of new Music Research, **14** (1985) 1-9

[5] E. BLACKWOOD: *The structure of Recognizable Diatonic Tunings*. Princeton University Press (1985)

Пример 1